Sistema lineare di m equazioni in n incognite su di un campo $\mathbb{K}$

$$AX = B \qquad A \in \mathbb{K}^{m,n} \quad B \in \mathbb{K}^{m,1} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- $m = n = 1$ $\quad ax = b$ se $a \neq 0$ $\quad x = a^{-1}b$
- $m = n$. Se $A \in \mathbb{K}^{m,m}$ è invertibile

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

e si parla di sistema di Cramer.

$\exists!$ soluzione $\quad AX_0 = B = AX_1$

$$X_0 = A^{-1}B = X_1$$

SISTEMI EQUIVALENTI

$$AX = B \qquad \text{con} \quad A \in \mathbb{K}^{m,n} \qquad B \in \mathbb{K}^{m,1}$$

$$A'X = B' \qquad A' \in \mathbb{K}^{m',n} \qquad B' \in \mathbb{K}^{m',1}$$

se hanno le medesime soluzioni.

Se due sistemi non sono compatibili $\Rightarrow$ hanno le stesse soluzioni $= \phi$.

SISTEMI COMPATIBILI

Oss: $AX = B$ sistema lineare $\rightarrow$ $AX - B = \underline{0}$

sia $G \in \mathbb{K}^{m,m}$ una matrice invertibile

e consideriamo il sistema $G(AX - B) = \underline{0}$

$$(GA)X = GB$$

Questo sistema è equivalente al sistema

$$AX = B$$

Infatti $G(AX-B) = \underline{0} \iff AX-B \in Ker(G)$

$\iff AX-B = \underline{0} \iff AX = B$

moltiplicare a sx per la matrice G è equivalente a lavorare sulle righe di $(AX-B)$.

$\Rightarrow$ possiamo costruire G come prodotto di matrici che descrivono operazioni elementari sulle righe.

1) $\begin{bmatrix} \alpha & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ $\alpha \neq 0$

2) $i \to$ $j \to$ $\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$ scambio riga i e riga j

$\uparrow i$ $\uparrow j$

3) $\begin{bmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_m \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix}$ sommo alla I riga c. lineare $a_2R_2 + \dots + a_mR_m$

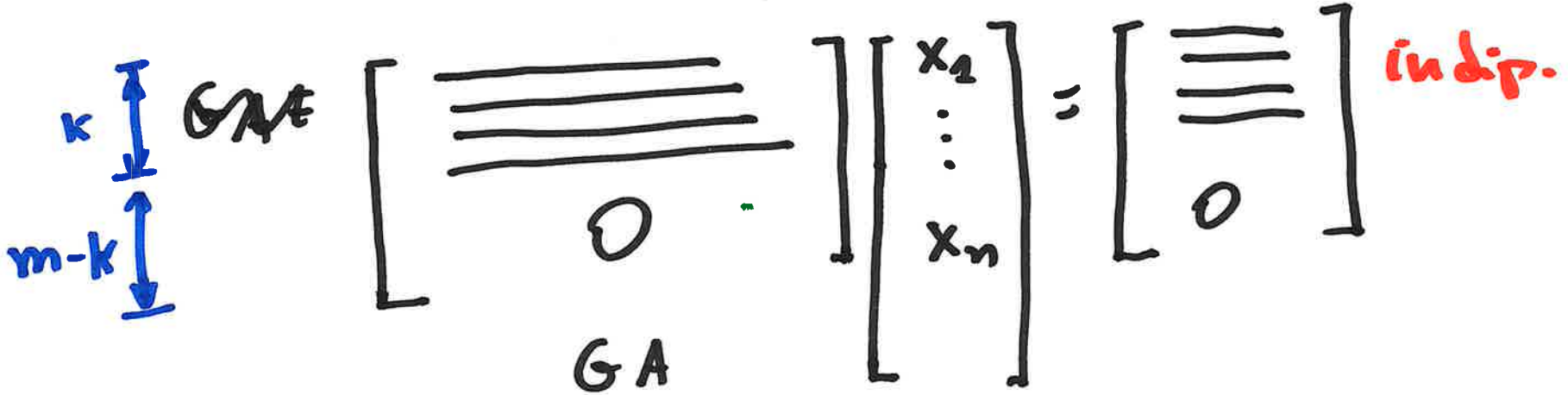
→ in particolare dato $AX=B$ possiamo sempre trovare una matrice G tale che $G(AX-B)=\underline{0}$ $\quad GAX=GB$

1) $\det(G) \neq 0$

2) le prime $k = rk(A)$ righe di $G(AX-B)$ sono una base dello sp. vettoriale generato dalle equazioni del sistema

3) le restanti $m-k$ righe sono nulle.

$$GAX = GB$$



Questo sistema è equivalente a quello di partenza.

OSS: le ultime (m-k) equazioni sono $0 = 0$ e quindi si possono rimuovere senza alterare le soluzioni del sistema.

Il sistema ottenuto di k equazioni in n incognite

è un sistema principale equivalente a quello dato.

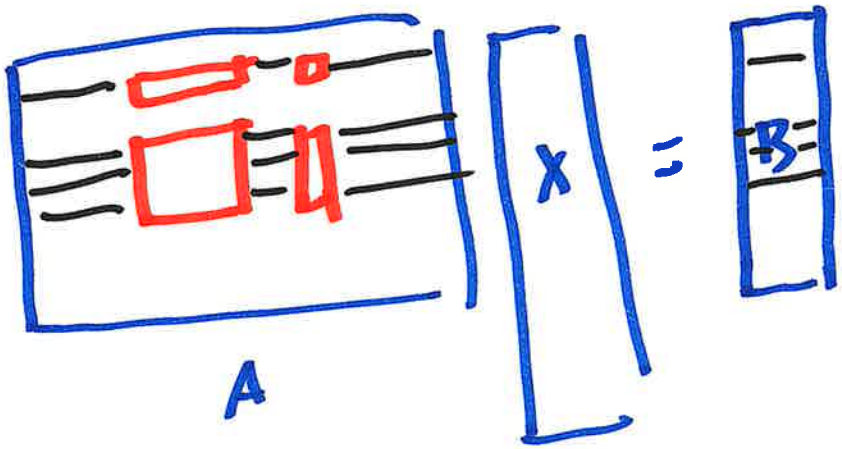
→ In un sistema compatibile contano solo le equazioni indipendenti.

→ Le soluzioni di un sistema compatibile dipendono solamente dallo sp. vettoriale generato dalle equazioni.

Tecniche risolutive.

1) Sia $AX = B$ un sistema lineare.
   a) verificare se è compatibile
      $rk(A) = rk(A|B)$

se non compatibile ⇒ FINE

b) 

se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ CRAMER

$X = A^{-1}B$.

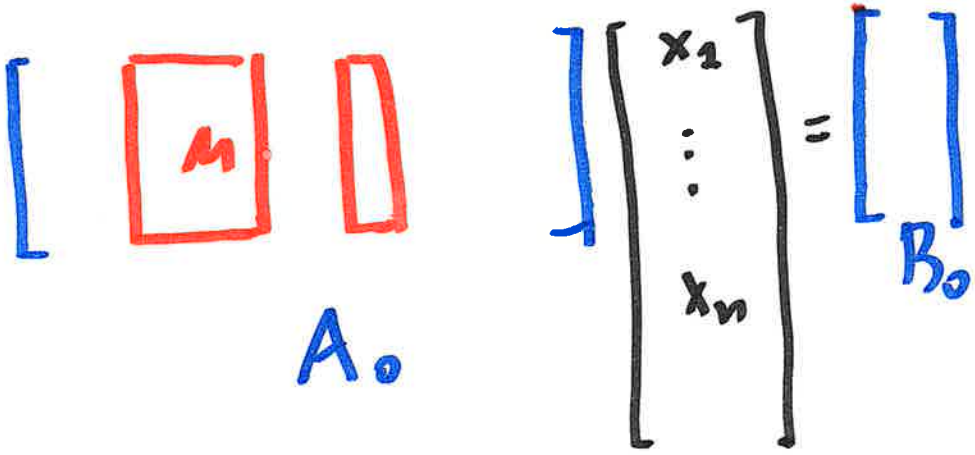
Sia M un minore di A con $M \in \mathbb{K}^{k,k}$, $\det(M) \neq 0$ e $rk(A) = k$

le righe di (A|B) invece delle da M sono una base per lo spazio delle righe ⇒

Teniamo le sole equazioni intercettate da M → sistema principale equivalente

$$A_0 X = B_0 \qquad A_0 \in \mathbb{K}^{k,n}$$

$$rk(A_0) = k$$



le soluzioni sono ∞^{n-k} cioè dipendono da k parametri.

CONSIDERIAMO LE INCOGNITE CHE CORRISPONDONO A COLONNE NON INTERCETTATE DA M COME

PARAMETRI E SPOSTIAMO I CORRISPONDENTI TERMINI A DX DELL'UGUAGLIANZA

$$\begin{bmatrix} C_1 & \boxed{C_2\ C_3 \cdots} & \boxed{C_{n-1}} & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \end{bmatrix}$$

M

$$\overbrace{\begin{bmatrix} C_2 C_3 C_{n-1} \end{bmatrix}}^{M} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \end{bmatrix} - \overbrace{C_1 x_1 - \dots - C_n x_n}^{n-K}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = M^{-1} \left(B_0 - C_1 x_1 - \dots - C_n x_n \right)$$

$\blacksquare$

Metodo 2 riduzione in forma a scalini

$$(A|B) = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1} \dots a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

cerchiamo la I equazione che ha coeff. $a_{i1} \neq 0$

se c'è $\Rightarrow$ ok, altrimenti la I colonna è $\underline{0}$

passiamo alla II

a) se c'è tale eq., mettiamola come prima eq. del sistema

b) dividiamo questa eq. per $a_{11} \neq 0$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Vequazione i successive alla prima, sottraiamo ad essa a_{i1} · prima equazione.

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right]$$

cerchiamo ora la prima entrata $\neq 0$ nel blocco del tipo $a'_{i2} \neq 0$ con $i \geq 2$

$$\left[\begin{array}{ccc} a'_{22} & \dots & b'_2 \\ \vdots & & \\ a'_{m2} & \dots & b'_m \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

dividiamo la II riga per a'_{22}

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & x'_{n2} & & \end{bmatrix}$$

e come prima sottraiamo in successione le combinazioni della II riga con le successive in modo da annullare tutti i coeff. nella II colonna tranne quello $a''_{22} = 1$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \hat{a}_n & 0 & \cdots & \hat{b}_1 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & \hat{b}_m \end{array}\right]$$

DOPO AVER RAGIONATO SU TUTTE LE RIGHE ALLA FINE OTTENIAMO UNA MATRICE DI FORMA RIDOTTA PER RIGHE A SCALINI.

1) OGNI RIGA NON NULLA HA COME PRIMO COEFFICIENTE UN 1 (PIVOT)

2) ~~SOPRA IL PIVOT~~ LE COLONNE CORRISPONDENTI AI PIVOT HANNO UN'UNICA ENTRATA NON NULLA.

3) Se la riga i ha pivot in posizione j
$\Rightarrow$ Ogni riga successiva ha pivot in posizione $> j$
oppure è nulla.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{0} & 5 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7 & \boxed{0} & & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & & & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A B

$$I_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Oss: Siano $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k$ vettori

Esiste un'unica base di $\mathcal{L}(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_k)$ in forma RRÈF

Supponiamo di avere 2 basi dello stesso s. vettoriale $\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_t$ e $\bar{e}''_1 \dots \bar{e}''_t$ in forma RRÈF rispetto la base canonica di $\mathbb{K}^n$

$a_{11}\bar{e}'_1 + \dots + a_{1t}\bar{e}'_t = \bar{e}''_1$

nel pivot

RRÈF = Row Reduced Echelon Form.

$$\text{RREF} \quad \begin{bmatrix} \boxed{R_1} \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$$

$$\text{RK} = K$$

$$\text{RREF} \quad \begin{bmatrix} \boxed{R_1'} \\ \vdots \\ R_k' \end{bmatrix}$$

considero $R_1' - R_1 \rightarrow u = 0$

$\Rightarrow R_1' = R_1$

se $\neq 0$ ci sarà una prima componente non nulla in $R_2' - R_1$

questa comp. non nulla viene da
una C. lineare delle Righe

$$\alpha_2 R_2 + \dots \alpha_k R_k$$

e in particolare tale componente
deve corrispondere al pivot
del primo vettore $R_2 \dots R_k$
che compare con coeff. $\neq 0$

D'ALTRO CANTO un vettore di quel tipo
è anche c. lineare di $R_i' \dots R_k'$
ma questo implica che quel pivot
deve essere anche pivot di uno dei
vettori $R_2' \dots R_k' \Rightarrow$ il coeff. deve essere $= 0$. }